LE CALCUL NUMERIQUE AU COLLÈGE

Dans le document d'application des programmes de mathématiques pour le cycle 3 de l'école[1], il est écrit : *« La diffusion généralisée d'outils de calcul instrumenté (et notamment des calculatrices de poche) amène à repenser les objectifs généraux de l'enseignement du calcul. L'objectif prioritaire reste, bien entendu, que les connaissances numériques des élèves soient opératoires, c'est-à-dire au service des problèmes qu'elles permettent de traiter, dans des situations empruntées à l'environnement social ou à d'autres domaines disciplinaires étudiés à l'école.*
Trois moyens de calcul sont aujourd'hui à la disposition des individus : le calcul mental, le calcul instrumenté (utilisation d'une calculatrice, d'un ordinateur) et le calcul écrit (notamment, ce qui est usuellement désigné par le terme de « techniques opératoires »). Dans la vie courante, comme dans la vie professionnelle, le calcul instrumenté a largement remplacé le calcul écrit. La question de la place à accorder aux différents moyens de calculer doit donc être précisée. Pour ces différents moyens, il convient de plus de distinguer ce qui doit être automatisé et ce qui relève d'un traitement raisonné (calcul réfléchi) ».
La question du calcul se pose dans les mêmes termes au collège en élargissant toutefois l'étude aux calculs portant sur les nombres en écriture fractionnaire, les nombres relatifs et les racines carrées.

1. Calcul et raisonnement

Dans son rapport d'étape sur la pratique du calcul, la Commission de réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques[2] (CREM) mentionne : « *Dans la culture, les deux termes, calcul mathématique et raisonnement apparaissent comme antagonistes. Le calcul est opposé au raisonnement tant dans les démarches de pensée qu'il met en œuvre que dans les formes d'apprentissage qu'il requiert. Le calcul renvoie à une activité mécanique, automatisable, sans intelligence, il est réduit à sa part mécanisée. Son apprentissage renvoie à l'idée d'entraînement purement répétitif. En bref, le calcul est perçu comme renvoyant aux basses œuvres du travail mathématique, tandis que sa partie noble, celle liée au raisonnement, est plutôt associée à la résolution de problèmes géométriques. Cette image, ancrée dans la culture, est aussi portée par l'enseignement* ».
Le discrédit dont souffre le calcul tant dans la culture que dans l'enseignement est totalement injustifié. Calculer c'est bien plus qu'une simple activité mécanique, automatisable, de plus en plus déléguée d'ailleurs à des machines[3]. Apprendre à calculer :

- C'est d'abord apprendre à rendre des situations accessibles au calcul par un travail de mathématisation en privilégiant certaines caractéristiques des objets et en en occultant d'autres. Par exemple pour calculer l'aire d'une surface complexe, il peut être utile de la décomposer en surfaces «élémentaires » dont on sait facilement déterminer l'aire. Si le calcul peut et doit être objet d'étude, il intervient ainsi le plus souvent comme outil pour traiter des situations (rapport avec le réel, avec d'autres disciplines et, plus particulièrement, avec la mesure des grandeurs) ;

[1] *Documents d'application des programmes, Mathématiques cycle 3,* Scérén, CNDP, document téléchargeable à l'adresse suivante http://www.cndp.fr/ecole/
[2] J.-P. Kahane (2002), *« L'enseignement des sciences mathématiques »*, O. Jacob
Le rapport d'étape sur la pratique du calcul peut être téléchargé sur le site Eduscol
[3] Voir l'article de M. Artigue (2004), *« L'enseignement du calcul aujourd'hui : problèmes, défis et perspectives »*, Repères IREM n° 54, p. 23 - 39

- C'est aussi apprendre à traiter des calculs, de façon automatisée ou raisonnée, pour aboutir à un résultat exact ou approché. Ce qui fait la puissance des mathématiques, ce n'est pas seulement qu'elles rendent les objets calculables, c'est aussi que le calcul puisse s'algorithmiser et s'automatiser. Algorithmisation et automatisation sont l'aboutissement d'un processus où le raisonnement occupe une place prépondérante, processus qui conduit à substituer une activité routinière à une activité d'abord réfléchie ;
- C'est aussi apprendre à organiser, à «programmer » un calcul pour le rendre exécutable par soi-même ou par une machine (calculatrice, ordinateur).

2. Les différents aspects du calcul

Le tableau suivant offre un cadre permettant de penser les différents moyens de traiter un calcul pour obtenir un résultat exact ou approché :

	Calcul automatisé	**Calcul réfléchi ou raisonné**
Calcul mental	Résultats mémorisés Procédures automatisées	Procédures construites ou reconstruites Choix des arrondis
Calcul écrit (papier-crayon)	Techniques opératoires (calcul posé)	Procédures construites ou reconstruites Choix des arrondis
Calcul instrumenté (calculatrice, logiciel)	Calculs usuels (quatre opérations), racines carrées, calculs trigonométriques, fonctions statistiques, utilisation des fonctions simples d'un tableur…	- programmation d'un calcul complexe - adaptation de la procédure aux possibilités de la machine

2.1 Le calcul mental

Une bonne maîtrise du calcul mental est une priorité pour diverses raisons :

- C'est un calcul d'usage, utile au quotidien. Il s'agit de mettre en place des moyens efficaces de calculer, chaque fois que le recours à un calcul posé ou à un instrument n'est pas nécessaire ou pas possible. Même si l'usage de la calculatrice est de plus en plus répandu, il demeure indispensable de savoir calculer sans elle pour obtenir rapidement un résultat exact dans des cas simples ou un résultat approché dans d'autres cas.
- Aucun calcul écrit ne peut être effectué sans une disponibilité suffisante de résultats mémorisés (tables d'addition, tables de multiplication, carrés des premiers naturels et de quelques autres nombres usuels…) ou obtenus mentalement en recourant à des procédures automatisées (multiplication et division par 10, 100, 1000…, règles d'addition des relatifs, $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ …). Sans disponibilité rapide des résultats des tables, il n'y a pas d'accès possible aux techniques opératoires : dans le cas de la multiplication, les erreurs « de table » concernent près de 15% des élèves à l'entrée en sixième[4], elles sont beaucoup plus fréquentes que celles qui sont dues à une mauvaise maîtrise de l'algorithme de calcul. Dans le même ordre d'idée, un élève peut être en difficulté pour écrire $\sqrt{28}=2\sqrt{7}$, non pas parce qu'il ne sait pas que dans le cas où les nombres sont positifs : $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$

[4] Evaluation à l'entrée en 6e, années 2004 et 2005, Direction de l'Évaluation et de la Prospective

et $\sqrt{a^2} = a$, mais parce qu'il est dans l'incapacité de décomposer 28 en un produit d'un nombre par un carré.

- Le calcul mental permet de contrôler un résultat obtenu par un autre moyen de calcul. Pour déterminer un ordre de grandeur d'une somme, d'un produit ou d'un quotient, il faut commencer par décider de la précision voulue et en fonction de cela faire le choix des arrondis des nombres qui interviennent dans le calcul. Ainsi pour évaluer un ordre de grandeur de 1057,2 + 358,37 une précision de l'ordre de la centaine peut être suffisante. Il est alors possible d'« arrondir » à 1050 + 350 ou encore à 1100 + 300 en cherchant à compenser une valeur prise par excès par une valeur prise par défaut. Dans le cas de 1057,2 + 18,37 c'est une approximation à la dizaine qui sera recherchée ou encore un encadrement de cette somme par 1057 + 13 et 1057 + 20. Dans le cas d'un produit, savoir compenser une valeur choisie par excès par une valeur choisie par défaut ou encore savoir positionner le résultat exact par rapport à l'ordre de grandeur de celui-ci est essentiel. Afin de développer ce type de compétences, il est indispensable que l'élève puisse évaluer les conséquences de ses choix d'approximations sur l'écart entre le résultat exact et l'ordre de grandeur qu'il souhaite obtenir. Actuellement le développement de ces compétences est trop souvent laissé à la seule charge des élèves, alors que, en ce domaine, l'expérience et l'entraînement jouent un rôle fondamental.

- Le calcul mental réfléchi nécessite l'élaboration de stratégies de calcul personnelles. Il met donc en jeu l'initiative, le raisonnement et des connaissances (explicites ou non) sur la numération et les propriétés des opérations. Sa pratique nécessite la mise en oeuvre de relations entre calcul et raisonnement, d'où l'expression de calcul raisonné, parfois proposée pour le désigner. Donnons deux exemples :
  - Il n'est nul besoin de mémoriser la «règle » de la division par 0,1. L'utilisation de connaissances et procédures mémorisées y supplée avantageusement. Il suffit pour cela au niveau de la classe de 6e de savoir qu'un quotient ne change pas quand on multiplie numérateur et dénominateur par un même nombre ($\frac{a}{0,1} = \frac{a \times 10}{0,1 \times 10} = a \times 10$) ou encore, à partir de la classe de 4e, que 0,1 c'est un dixième, que diviser par un nombre c'est multiplier par son inverse et que l'inverse de un dixième c'est 10. Il faut donc surtout savoir que $a : 0,1 = a \times \frac{1}{0,1} = a \times 10$.
  - Le calcul de 25 × 12 peut être effectué de différentes façons :
    - en utilisant le fait que 25 × 4 = 100 et que 12 = 4 × 3 (qui sont deux résultats mémorisés) ainsi que la maîtrise « en actes » de la propriété d'associativité de la multiplication ; ainsi : 25 × 12 = 25 × (4 × 3) = (25 × 4) × 3 = 100 × 3 = 300 ;
    - en utilisant le fait qu'on ne change pas la valeur d'un produit quand on multiplie un facteur par un nombre et qu'on divise l'autre facteur par ce même nombre :
      25 × 12 = (25 × 4) × (12 : 4) = 100 × 3 = 300
    - en utilisant le fait que 25 est le quart de 100 (après avoir repéré que 12 est divisible par 4) ; il suffit alors de prendre 100 fois le quart de 12 : $25 \times 12 = \frac{100}{4} \times 12 = 100 \times \frac{12}{4}$.
    - en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, la «règle » de la multiplication par 10 qui est une procédure automatisée et la connaissance des doubles de nombres usuels (résultat mémorisé) ; ainsi :
      25 × 12 = 25 × (10 + 2) = (25 × 10) + (25 × 2) = 250 + 50 = 300.

Le calcul réfléchi consiste souvent à rendre un calcul plus simple, en procédant par étapes plus nombreuses, mais en s'appuyant sur des résultats immédiatement disponibles. Ceci nécessite l'élaboration de procédures originales et, par là, contribue au développement des capacités de raisonnement des élèves. Le calcul réfléchi s'oppose au calcul automatisé en cela que les procédures construites sont avant tout personnelles et doivent être choisies en tenant compte des particularités des nombres en présence. L'exploitation en classe des diverses procédures mises en œuvre par les élèves pour un même calcul permet de mettre l'accent sur les raisonnements mobilisés et sur les propriétés des nombres et des opérations utilisées «en acte ». L'explicitation des différentes procédures est nécessaire pour permettre à l'élève de découvrir d'autres procédures que la sienne et éventuellement de s'en approprier une nouvelle. En dehors de quelques procédures appelées à devenir automatisées (car très performantes et d'usage fréquent), l'explication des procédures ne doit pas donner lieu à l'institutionnalisation d'une procédure particulière, car ce qui est simple pour un élève ne l'est pas nécessairement pour un autre, la notion de simplicité étant fonction des connaissances numériques de chacun.

- Un déficit de compétences en calcul mental constitue un handicap majeur pour de nombreux élèves en collège. Par exemple, la perception rapide de rapports entre les nombres dans le cas de la proportionnalité permet de faire le choix de la procédure la mieux appropriée (utilisation des propriétés de linéarité ou du coefficient de proportionnalité), la simplification d'écritures fractionnaires ne peut pas se faire sans une bonne connaissance des tables de multiplication (pour simplifier $\frac{112}{70}$, il faut reconnaître les deux nombres comme étant multiples de 2, savoir prendre la moitié d'un nombre, puis savoir que 56 et 35 figurent tous les deux dans la table de 7). Il en va de même de la réduction ou de la factorisation d'expressions algébriques simples. Exemples :
    - $1{,}75\,x + 2{,}5\,x = 4{,}25\,x$ peut être obtenu en utilisant le fait que $0{,}75 = 0{,}5 + 0{,}25$ et donc que $0{,}75 + 0{,}5 = 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}25 = 1{,}25$ ou en ayant mémorisé que $0{,}75 + 0{,}5 = 1{,}25$;
    - écrire que $13{,}4\,x + 6{,}7 = 6{,}7\,(2x + 1)$ nécessite d'avoir reconnu que 13,4 est le double de 6,7.
- L'habileté en calcul mental est une aide à la conceptualisation. En travaillant dans un domaine où les calculs peuvent être réalisés mentalement et rapidement, les élèves peuvent s'approprier plus aisément de nouveaux savoirs et apprendre à les utiliser, en centrant leur attention sur ce qui est nouveau. Tant pour les nombres relatifs que pour les nombres en écritures fractionnaires, ou encore les racines carrées, le traitement de calculs ne comportant pas, pour les élèves, de difficultés dues au choix des nombres favorise la focalisation sur la mise en œuvre des procédures de calcul et des propriétés qui permettent de les justifier. Il en va de même pour le développement des compétences en calcul littéral, pour l'utilisation de certains théorèmes de géométrie comme le théorème de Thalès et la maîtrise «en actes » des propriétés des opérations…
- Le calcul mental apporte souvent une aide à la résolution de problèmes, notamment lorsque l'élève ramène le problème à un champ numérique dans lequel les calculs deviennent plus familiers : essayer avec des nombres plus petits permet, par exemple, d'avoir une intuition d'un mode de traitement possible.

Dans le prolongement du travail réalisé à l'école primaire, la pratique régulière du calcul mental doit être envisagée dans trois directions :

- L'entretien et le développement des connaissances (résultats mémorisés et procédures automatisées) construites à l'école primaire et sans lesquelles l'élève serait en difficulté (parfois en échec), pour développer de nouvelles compétences (résolution de problèmes de proportionnalité, calcul sur les nombres relatifs, sur les quotients, sur les racines carrées, utilisation des théorèmes de Pythagore et de Thalès…) ;
- La pratique du calcul réfléchi et la diversification des stratégies qui permettent de familiariser les élèves avec les nombres et de faire fonctionner certaines propriétés des opérations ;
- Le développement de la maîtrise du calcul approché, souvent utilisé dans la vie courante est utile pour anticiper un ordre de grandeur ou contrôler l'exactitude d'un résultat.

Les principales connaissances qui sont à entretenir et à développer au collège ainsi que les contextes dans lesquels elles sont mobilisables sont recensés dans un tableau placé en annexe de ce document.

2.2 Le calcul écrit

On peut être tenté d'opposer le calcul mental au calcul écrit, mais cette opposition n'est pas totalement fondée. Parler de calcul mental ne signifie pas que tout se passe sans écrire. Couramment, dans la conduite d'un calcul effectué mentalement, l'écrit est utilisé pour garder trace d'un résultat intermédiaire et ainsi alléger le travail de mémorisation. Inversement, l'exécution de l'algorithme d'une opération posée requiert au minimum la connaissance des tables et la gestion des retenues ; elle ne dispense donc pas de calculer mentalement, bien au contraire. L'exemple emblématique en est la technique écrite française de la division, avec ou sans les soustractions intermédiaires, qui requiert de nombreux traitements mentaux. Un déficit de maîtrise dans le domaine du calcul mental fragilise donc gravement l'apprentissage des techniques écrites.

Le calcul écrit ne se réduit pas à l'application de techniques automatisées. Avant de disposer d'un algorithme ou en l'absence d'instrument de calcul qui permet d'accéder directement au résultat, l'élève est à même de conduire un calcul papier-crayon et de produire un résultat en mobilisant ses connaissances. En classe de 6e, un élève peut déterminer un quotient décimal d'un décimal par un décimal comme $\frac{5,24}{2,1}$ sans disposer de la technique posée qui consiste à rendre le diviseur entier en déplaçant la virgule d'autant de rangs au dividende qu'au diviseur. Il lui est possible de s'appuyer sur la propriété mise en place sur les égalités des écritures fractionnaires : $\frac{5,24}{2,1} = \frac{524}{210}$ ou $\frac{5,24}{2,1} = \frac{52,4}{21}$, se ramenant ainsi au calcul d'un quotient décimal qu'il sait conduire. Ce n'est qu'en 5e, après avoir, pendant un certain temps, eu à gérer séparément ces deux phases (écriture de l'égalité des deux quotients sous forme fractionnaire et pose de la division d'un entier ou d'un décimal par un entier), que la technique posée avec déplacement de la virgule pourra être systématisée, prenant ainsi sens. En classe de 3e, un élève peut par exemple déterminer une valeur approchée de $\sqrt{1733}$ en utilisant, comme allant de soi, la propriété suivante : deux nombres positifs sont dans le même ordre que leurs carrés. Ainsi $1\,600 < 1\,733 < 2\,500$ et $40 < \sqrt{1733} < 50$. Il peut poursuivre sa recherche en procédant par des essais multiplicatifs successifs : calcul de 41^2, 42^2, $41{,}5^2$ …

Comme à l'école primaire, le travail sur les techniques opératoires conduit en début de collège doit être recentré dans deux directions :

- viser une bonne maîtrise dans des cas dits « simples », évitant à l'individu de devenir dépendant de la machine ;
- insister sur le travail de compréhension et de justification de ces techniques qui permet d'enrichir les connaissances mathématiques des élèves sur la numération et sur les propriétés des opérations.

Les compétences calculatoires à développer sur chacun des types de nombres abordés au collège sont développées au paragraphe 3.

2.3 Le calcul instrumenté

Le calcul assisté, par une calculatrice ou un tableur, trouve naturellement sa place dans la résolution de problèmes :

- En libérant les élèves de calculs fastidieux, il leur permet de focaliser leur attention sur l'élaboration, la mise en œuvre et le contrôle d'une stratégie de résolution ;
- Dans le cas de l'exploration d'un phénomène numérique, il permet d'arriver rapidement à la formulation de conjectures qui doivent être ensuite validées ;
- Il peut être la source de problèmes[5], lorsqu'il faut déterminer par exemple, à l'aide d'une calculatrice ordinaire, en 6e le quotient et le reste d'une division euclidienne ou en 5e un produit de deux nombres comme 123 123 et 234 567. Ces deux exercices, bien qu'effectués à l'aide d'une calculatrice relèvent du calcul réfléchi. Le premier nécessite de penser le quotient euclidien comme étant la troncature à l'unité du quotient décimal affiché par la calculatrice et de concevoir le reste de la division euclidienne comme étant la différence entre le dividende et le produit du quotient euclidien et du diviseur. Pour résoudre cet exercice, l'élève est conduit à donner du sens à la division en lien avec la multiplication. La taille du calcul à effectuer dans le second exercice dépasse la capacité d'affichage d'une calculatrice ordinaire (10 chiffres) qui renvoie 28880593 E10. Néanmoins, le résultat exact peut être produit en combinant calcul machine et support écrit, en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ainsi que la multiplication d'un entier par une puissance de 10 ; comme par exemple
  $123\,123 \times 234\,567 = 123\,000 \times 234\,567 + 123 \times 234\,567$
  Des problèmes comme par exemple en 6e : *« Après avoir affiché à l'écran le nombre 142,37, que taper sur la calculatrice pour qu'elle affiche le nombre 1423,7 ? »* ou comme *« La touche , de la calculatrice est bloquée, comment faire afficher le nombre 12,3 ? »* permettent un nouveau travail sur la règle de multiplication par 10, 100, 1000…, autrement qu'en effectuant des révisions, ou encore sont l'occasion de mettre en évidence qu'un décimal est un quotient d'un entier par une puissance de 10.

Comme pour les autres types de calculs, l'emploi de la calculatrice relève, selon le cas, soit :

- du calcul automatisé, lorsque l'élève a recours à des fonctions « basiques », dans le cas du calcul d'une somme, d'un produit, d'un cosinus d'un angle, d'une moyenne d'une série statistique… ;
- du calcul réfléchi, comme par exemple lorsqu'il s'agit de calculer le quotient d'une somme par un nombre qui nécessite que soit pensée l'organisation des calculs avant d'utiliser la calculatrice. Ainsi, pour effectuer le calcul de $\frac{3{,}17 + 2{,}5}{7}$, il est nécessaire de savoir qu'il faut commencer par effectuer 3,17 + 2,5 et que, pour qu'une calculatrice qui intègre les priorités opératoires commence par effectuer cette somme, il faut recourir à l'utilisation de parenthèses : (3,17 + 2,5) : 7. Ou encore, en trigonométrie, pour le calcul

[5] Voir à ce propos dans *Documents d'accompagnement des programmes, Mathématiques École primaire,* Scérén, CNDP, l'article *Utiliser les calculatrices en classe,* téléchargeable sur le site Eduscol

d'une longueur comme dans l'exemple suivant : ABC étant un triangle rectangle en A, ayant déjà établi que $BC = \frac{5,4}{\cos(33°)}$, et ayant à calculer AC, égal à BC $\times$ cos (57°), au lieu de remplacer BC par 6,4 en tronquant grossièrement le résultat affiché (on obtient alors pour AC : 3,485689824), il convient soit d'utiliser la valeur affichée pour BC et d'enchaîner en la multipliant par cos(57°), soit d'utiliser la mémoire pour conserver la valeur de BC, ce qui pour AC donne dans les deux cas: 3,5068 01003.

L'apprentissage des différentes fonctionnalités d'une calculatrice, d'un tableur ne doit pas être laissé à la charge des élèves, il doit être intégré au cours de mathématiques. C'est le cas par exemple de l'utilisation de facteurs constants, des mémoires. Il est également important que les élèves prennent conscience de certains aspects du fonctionnement de leur calculatrice, notamment du fait que la précision de calcul dépasse la capacité d'affichage. Ainsi, le problème peut être posé de faire apparaître le chiffre suivant de la partie décimale d'un quotient pour savoir si l'arrondi affiché l'est par défaut ou par excès.
Comme tout outil, la calculatrice doit être utilisée à bon escient et l'élève doit être à même d'exercer un contrôle sur le résultat obtenu, ce qui n'est possible que s'il a construit des compétences suffisantes en calcul mental.

Le paragraphe qui suit est destiné au professeur pour l'aider à penser des activités pour ses élèves.
Malgré sa place officielle importante et sa puissance de calcul de plus en plus grande, la calculatrice souffre encore parfois d'une réputation peu flatteuse[6]. Par exemple, si on s'accorde sur l'opportunité de son emploi pour justifier que deux nombres rationnels tels que $\frac{15}{17}$ et $\frac{17}{19}$ sont différents, la suspicion l'emporte généralement pour prouver l'égalité de deux nombres de cette nature, par exemple $\frac{88}{209}$ et $\frac{56}{133}$. En prenant prétexte des "limites" de la calculatrice, l'argument évoquant l'égalité des résultats affichés par la calculatrice (par exemple 0,4210526316) pour chacun des deux nombres, est écarté en évoquant une hypothétique différence concernant leur 25e décimale. Or un examen élémentaire permet de montrer qu'une telle évocation est illégitime. En effet, si $\frac{88}{209}$ et $\frac{56}{133}$ étaient différents, leur différence, au signe près, pourrait s'écrire sous la forme $\frac{k}{209\times133}$ où k désigne un nombre entier naturel, et serait donc supérieure à $\frac{1}{209\times133}$. La calculatrice montre que cette différence est strictement supérieure à 3×10^{-5}. Donc, si ces deux nombres étaient différents, leurs affichages sur la calculatrice différeraient avant la 6e décimale. Comme il n'en est rien (leurs affichages sont les mêmes jusqu'à la cinquième décimale incluse), ces deux nombres sont égaux. Un argument du même type, mais un peu plus complexe, accompagnant l'emploi de la calculatrice, peut servir pour démonter que $2\sqrt{2}$ et $\sqrt{8}$ sont égaux. Une calculatrice affiche pour ces deux nombres le même résultat (par exemple, 2,828427125). Or si $a\sqrt{b}$ et $\sqrt{c}$ (a, b et c désignant des entiers naturels) sont différents, compte tenu du fait que $\left(a\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(a\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)=a^2b-c$, leur différence, égale à $\frac{a^2b-c}{a\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, serait au signe près

[6] Voir l'article de Y. Chevallard, "La calculatrice, ce bon objet. La calculatrice en classe : instrument tout puissant, tombeau de la pensée ou laboratoire très sûr ?", publiée dans le numéro 54 des Dossiers de l'ingénierie éducative, intitulé "Des outils pour les mathématiques", avril 2006.

supérieure à $\frac{1}{a\sqrt{b}+\sqrt{c}}$. Or ici, $\frac{1}{2\sqrt{2}+\sqrt{8}}$ est strictement supérieur à 0,1. Donc, si $2\sqrt{2}$ et $\sqrt{8}$ étaient différents, leur différence, au signe près, serait strictement supérieure à 0,1, et leurs affichages sur la calculatrice différeraient avant la 2e décimale. Or ce n'est pas le cas. Donc ces deux nombres sont égaux.

3. Le calcul sur les différents types de nombres étudiés au collège

Les commentaires qui suivent viennent en complément du document d'accompagnement sur les nombres au collège. Pour faciliter la mise en correspondance des deux documents, le choix a été fait d'organiser l'étude du calcul sur les différents types de nombres selon le même ordre.

Apprendre à calculer nécessite de travailler différentes compétences :

- identifier les différentes situations qu'une opération permet de résoudre efficacement, ce qui est communément désigné sous le terme « sens » des opérations ;
- maîtriser les désignations symboliques (écriture des nombres, signes opératoires…), leur syntaxe particulière (parenthésage, priorités opératoires…) ainsi que les propriétés qui légitiment les transformations sur ces écritures ;
- acquérir une maîtrise des techniques de calcul, dont les « opérations posées », suffisante pour ne pas être tributaire d'une machine. La maîtrise complète d'une technique nécessite que l'étude de celle-ci soit orientée vers sa compréhension et sa justification.

Dans ce document, ces trois aspects sont traités conjointement pour chacun des types de nombres.

A l'école primaire, les élèves ont appris à calculer la somme et la différence de naturels et de décimaux, le produit de deux naturels ou d'un décimal par un entier, le quotient et le reste d'une division euclidienne, avec possibilité de poser des soustractions intermédiaires et d'effectuer des produits partiels pour déterminer certains chiffres du quotient.

3.1 Les entiers naturels

La connaissance des situations relevant de l'addition et de la soustraction ainsi que le calcul d'une somme et d'une différence sont bien maîtrisés à l'entrée au collège. Par contre, pour certains élèves, il convient d'asseoir le sens et la technique de la multiplication. Différentes typologies de problèmes existent qui sont susceptibles de guider l'enseignant dans le choix des problèmes qui vont l'aider à mieux cerner les acquis et les difficultés de ses élèves et qui vont permettre à l'élève d'élargir sa connaissance des situations qui relèvent de la multiplication. En ce domaine, la typologie des structures multiplicatives[7] élaborée par Gérard Vergnaud s'avère très utile. Il est également important que les élèves construisent « en actes » et soient capables de verbaliser sur des exemples, sans toutefois recourir à leur dénomination, les propriétés ainsi que les « non propriétés » de la multiplication, comme par exemple le fait qu'elle n'est pas distributive par rapport à elle-même.

Le calcul mental joue un rôle essentiel en ce domaine. Dans un contexte numérique adapté aux compétences des élèves, il permet d'appréhender et de faire fonctionner les propriétés des opérations. Il permet également dans un temps court de varier les «petits problèmes » qui vont aider l'élève à enrichir sa connaissance du champ de validité d'une opération.

Les techniques de calcul posé de la multiplication de deux entiers et de la division euclidienne ont fait l'objet d'un apprentissage à l'école élémentaire. Toutefois, pour les élèves qui en

[7] Vergnaud G. (1983) « *L'enfant, la mathématique et la réalité* », Berne : Peter Lang.
Vergnaud G. et all (1997) *« Fichier pédagogique Résolution de problèmes »*, collection « Le moniteur de mathématiques », Nathan

début de collège ne maîtrisent pas encore la technique de la multiplication posée, il convient de travailler d'une part, la maîtrise des tables et d'autre part, la justification de la technique en lien avec la numération, comme par exemple en incitant à écrire à côté de chaque étape de la multiplication posée le calcul lui correspondant, ce qui permet de donner du sens au « décalage de rangs » :

	1	3	2	
×		2	7	
	9	2	4	132×7
2	6	4	0	$132 \times 20 = 132 \times 2 \times 10$
3	5	6	4	

Dans des problèmes où il n'est pas capable d'identifier rapidement la ou les opérations appropriées à leur résolution, l'élève privilégie souvent celles qu'il maîtrise le mieux (addition et multiplication) en recourant au besoin à des opérations à trou. Il convient de ne pas décourager cette démarche qui permet de construire les liens entre addition et soustraction d'une part, multiplication et division d'autre part.

Le travail de la technique de la division posée « à la française », entrepris à l'école doit être poursuivi en début de collège. La détermination d'un quotient partiel, comme par exemple la recherche du chiffre des centaines du quotient de 8 934 par 13, qui mobilise le calcul mental est l'occasion de renforcer le lien existant entre multiplication et division. La technique de la division est complexe et seule, la connaissance de la signification du travail effectué à chaque étape permet d'exercer un contrôle sur la mise en œuvre de l'algorithme.
Le contexte le plus favorable au travail de la technique de la division euclidienne est celui d'une situation de partage équitable où connaissant la valeur du tout et le nombre de parts, il s'agit de déterminer la valeur d'une part. Soit à partager 8934 en 13 parts égales :

	8	9	3	4	1	3	
-	7	8			6		
	1	1	3		c	d	u

Il n'est pas possible de partager 8 milliers en 13. Le quotient ne comportera donc pas de millier. Il faut commencer par partager 89 centaines en 13. Le recours au calcul mental et à la table de multiplication de 13 ou des essais multiplicatifs permet de déterminer le quotient : 6 centaines. 78 centaines ont ainsi été partagées ($6 \times 13 = 78$). Par soustraction, il reste 11 centaines qui, avec les 3 dizaines de 8934, font 113 dizaines à partager en 13.

	8	9	3	4	1	3	
-	7	8			6	8	
	1	1	3		c	d	u
-	1	0	4				
	0	0	9	4			

Le même travail est réitéré sur les 113 dizaines à partager en 13. Le quotient est 8 dizaines. 104 dizaines ont été partagées ($8 \times 13 = 104$). Il reste 9 dizaines qui, avec les 4 unités de 8934, font 94 unités à partager en 13.

	8	9	3	4	1	3		
-	7	8			6	8	7	
	1	1	3		c	d	u	
-	1	0	4					
	0	0	9	4				
		-	9	1				
			0	3				

Le même travail conduit sur les 94 unités à partager en 13 donne un quotient de 7 et un reste de 3.

Si nécessaire, il est possible de matérialiser la situation en évoquant le partage de 8 billets de mille, 9 billets de cent, 3 billets de dix et 4 pièces de un en 13 parts équitables. Présentée ainsi, cette situation nécessite des élèves qu'ils fassent explicitement fonctionner la numération décimale en pratiquant, au moins en pensée, des échanges (1 billet de cent contre 10 billets de dix…).
Un objectif raisonnable pour le collège est de savoir effectuer « à la main » la multiplication et la division d'un nombre de 3 ou 4 chiffres par un nombre de 2 ou 3 chiffres. La pose des soustractions intermédiaires constitue un moyen d'alléger la tâche de mémorisation en cours d'exécution de l'algorithme et elle facilite le contrôle à chacune des étapes de celui-ci. Il convient donc de laisser à l'élève le choix de les poser ou non et, dans le cas où un élève éprouve des difficultés dans la mise en œuvre de l'algorithme, de l'inciter à le faire.

3.2 Les nombres en écriture fractionnaire

La construction du sens des opérations et la justification des techniques de calcul sur les nombres écrits sous forme fractionnaire sont travaillées d'un double point de vue :
- en référence à la fraction définie à partir d'un partage de l'unité qui va aider à la construction d'images mentales. Mais cette conception de la fraction ne permet de légitimer les techniques que lorsque numérateur et dénominateur sont des entiers naturels ;
- en référence à la définition de la notion de quotient écrit sous forme fractionnaire. Cette seconde approche, complémentaire de la première, présente l'avantage d'étendre les techniques aux cas où numérateur et dénominateur ne sont plus des entiers naturels et de faire fonctionner la définition du quotient introduite en 6e. Cette approche suppose que soit postulée l'extension des propriétés des opérations sur les entiers naturels à ces nouveaux nombres que sont les quotients.

3.2.1 L'addition

a) En référence aux longueurs
Une unité de longueur étant choisie, les fractions expriment des mesures de longueurs.

- En mettant bout à bout deux segments qui mesurent respectivement $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$, on obtient un segment de longueur $\frac{a+b}{c}$. La verbalisation joue ici un rôle important. Par exemple, oraliser l'écriture $\frac{3}{7}+\frac{8}{7}$, « Trois septièmes plus huit septièmes », conduit naturellement à conclure que « c'est onze septièmes ».
- Dans le cas où les segments mesurent $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ avec $b \neq d$, on introduit une sous graduation de l'unité. Par exemple, pour obtenir la mesure du segment obtenu en mettant bout à bout deux segments de longueurs respectives $\frac{7}{6}$ et $\frac{3}{4}$, on partage régulièrement l'unité en un nombre de segments de même longueur qui est multiple de 6 et de 4, par exemple 12, on exprime alors chaque mesure en douzièmes de l'unité : $\frac{14}{12}$ et $\frac{9}{12}$, ce qui permet de se ramener au cas précédent.

b) En référence à la notion de quotient
- Lorsque les dénominateurs sont les mêmes

Posons $\frac{a}{c} = Q$ et $\frac{b}{c} = Q'$. Par définition du quotient de deux nombres :
Q est le nombre qui vérifie $c \times Q = a$ et Q' est le nombre qui vérifie $c \times Q' = b$.
On veut montrer que $Q + Q' = \frac{a+b}{c}$, c'est-à-dire, d'après la définition du quotient $\frac{a+b}{c}$, que $c \times (Q + Q') = a + b$. Or $c \times (Q + Q') = c \times Q + c \times Q'$ (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition). De $c \times Q = a$ et $c \times Q' = b$, on déduit immédiatement que $c \times (Q + Q') = a + b$.

- Lorsque les dénominateurs sont différents, on remplace les écritures fractionnaires par des écritures fractionnaires équivalentes ayant le même dénominateur.

En classe de 5e, la technique de l'addition de deux nombres écrits sous forme fractionnaire de même dénominateur est construite sur des exemples numériques en référence à la fraction partage et à la mesure. La notion de quotient est sollicitée pour institutionnaliser la technique de l'addition à partir d'un exemple générique. En classe de 4e, la technique de l'addition de deux nombres écrits sous forme fractionnaire de dénominateurs différents est construite de façon similaire en recourant, pour l'institutionnalisation, au calcul littéral ou à un exemple générique, selon la classe.

3.2.2 La multiplication

a) Prendre une fraction d'une quantité

Ce paragraphe est destiné au professeur, comme matériau pour élaborer certaines justifications auprès de ses élèves.
Trop souvent, cette question est abordée en posant a priori que, par exemple, « Prendre 7 tiers de 13 flopeks, c'est multiplier 13 flopeks par $\frac{7}{3}$ » ou encore que «Prendre 23 % de 470 € revient à effectuer 470 € $\times \frac{23}{100}$ ». Ceci n'a pourtant rien de naturel aux yeux des élèves pour qui « prendre 7 tiers de 13 flopeks », c'est prendre sept fois le tiers de 13 flopeks, et n'évoque donc pas, à juste titre, le calcul $\frac{7}{3} \times 13$.
En effet, prendre 7 tiers de 13 flopeks, c'est prendre 7 fois le tiers de 13 flopeks.
Le tiers de 13, c'est le quotient de 13 par 3 qui est égal à 13 tiers (la justification que le tiers de 13 est égal à 13 fois un tiers est apportée dans le document « Les nombres au collège »).
Donc 7 tiers de 13 flopeks, c'est 7 fois 13 tiers de flopeks ou encore (7 × 13) tiers de flopeks.
Il est ainsi prouvé que «prendre 7 tiers de 13 » revient à effectuer $\frac{7 \times 13}{3}$. Dans le même temps, ce qui précède montre que dans le cadre des grandeurs, «Prendre 7 tiers de 13 » est associé au produit de 7 et de $\frac{13}{3}$, et non au produit de 13 et de $\frac{7}{3}$.
De cet exemple générique, on peut dégager que pour « prendre $\frac{b}{c}$ de a unités », on est amené à effectuer $\frac{a \times b}{c}$ pour tous les nombres entiers a, b et c, pourvu que c soit non nul.

b) Produit d'un décimal par un quotient de deux entiers, de deux décimaux

Ce paragraphe est destiné au professeur, comme matériau pour élaborer certaines justifications auprès de ses élèves.

En classe de 6e, le cas de la multiplication d'un entier naturel par un quotient de deux entiers peut alors être traité en recourant au sens premier de la multiplication, celui d'une addition itérée. 6 fois 5 septièmes est égal à 30 septièmes : $6 \times \frac{5}{7} = \frac{6 \times 5}{7}$.

Ce raisonnement ne tient plus quand on multiplie un décimal non entier par un quotient de deux entiers.

Pour déterminer le produit de 1,7 par $\frac{5}{7}$, multiplions-le par 7 :

$(1{,}7 \times \frac{5}{7}) \times 7$ est égal à $1{,}7 \times (\frac{5}{7} \times 7)$ qui est lui-même égal à $1{,}7 \times 5$.

Le produit recherché, multiplié par 7, est égal à $1{,}7 \times 5$: par définition d'un quotient, ce nombre est donc le quotient de $1{,}7 \times 5$ par 7.

Et donc $1{,}7 \times \frac{5}{7} = \frac{1{,}7 \times 5}{7}$.

Cet exemple étant générique, on en déduit que *a* étant un décimal, *b* et *c* deux entiers avec *c* non nul : $a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c}$

La démonstration précédente montre, en toute rigueur, que si la multiplication demeure associative avec ces « nouveaux » nombres, alors le produit d'un nombre décimal par un quotient d'entiers est nécessairement défini ainsi.

En classe de 5e, cette égalité se généralise au cas où les trois nombres sont décimaux. En utilisant le fait qu'on ne change pas un quotient quand on multiplie numérateur et dénominateur par un même nombre, le produit d'un décimal par un quotient de deux décimaux peut être ramené au cas du produit d'un décimal par un quotient de deux entiers.

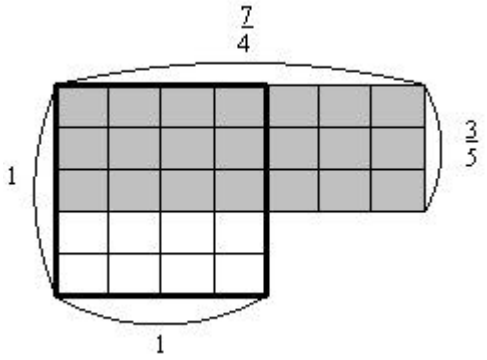
Nous avons vu précédemment que « Prendre $\frac{b}{c}$ de *a* » conduit à effectuer $\frac{a \times b}{c}$ et maintenant que $a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c}$. La technique évoquée plus haut et qui consiste à multiplier *a* par $\frac{b}{c}$ pour « prendre $\frac{b}{c}$ de *a* » est ainsi légitimée.

c) Produit de deux quotients

- **En référence aux aires**

Cette démarche suppose d'admettre l'extension de la formule donnant l'aire d'un rectangle ($L \times l$) à des mesures non entières.

En prenant pour unité de longueur la longueur du côté du carré et pour unité d'aire, l'aire de de ce carré, soit à calculer la mesure de l'aire d'un rectangle dont les dimensions sont $\frac{7}{4}$ et $\frac{3}{5}$.

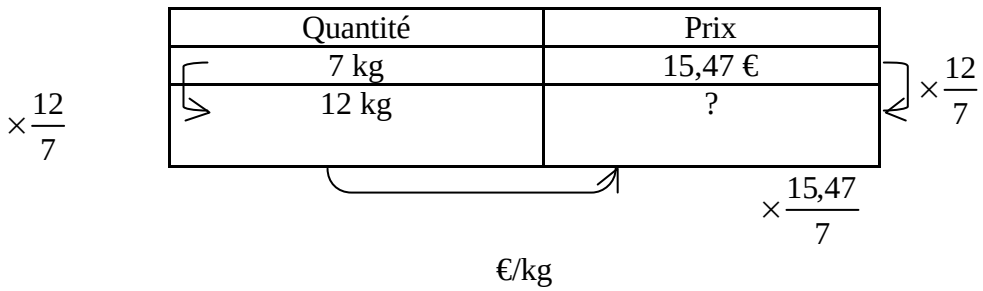


Le carré est découpé en 4×5 rectangles identiques. Le rectangle dont on cherche à évaluer l'aire contient 7×3 de ces rectangles, son aire représente donc $\frac{7\times3}{4\times5}$ de l'aire du carré. Et donc l'aire du rectangle peut être exprimée de deux façons, ce qui conduit à l'égalité : $\frac{7}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{7\times3}{4\times5}$

- **En référence à la notion de quotient**

Posons $\frac{a}{b} = Q$ et $\frac{c}{d} = Q'$ avec b et d deux entiers ou décimaux non nuls. Nous nous proposons de prouver que $Q \times Q' = \frac{a\times c}{b\times d}$, ce qui revient à prouver que $(Q \times Q') \times (b \times d) = a \times c$.
Or : $(Q \times Q') \times (b \times d) = (Q \times b) \times (Q' \times d)$
Et, d'autre part, par définition du quotient de deux nombres, Q vérifie $b \times Q = a$ et Q' vérifie $d \times Q' = c$.
Donc $(Q \times Q') \times (b \times d) = a \times c$
Nous avons ainsi démontré que $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a\times c}{b\times d}$.
La mise en place en classe de 5e des règles de calcul d'un produit de deux nombres écrits sous forme fractionnaire ne saurait se limiter à la preuve sur des aires. La preuve ci-dessus qui s'appuie sur la notion de quotient est accessible à des élèves de ce niveau, soit en recourant au calcul littéral, soit à un exemple générique, selon la classe.

La multiplication d'un nombre par un nombre en écriture fractionnaire a toute son utilité dans les problèmes de détermination d'une «quatrième proportionnelle », et ceci dès la classe de 6e. Par exemple, si 7 kg d'une denrée coûtent 15,47 €, quel est le prix de 12 kg de cette même denrée ?



Qu'on utilise la propriété multiplicative de linéarité ou le coefficient de proportionnalité, on opère alors sur des grandeurs, mais la nature du quotient diffère :

- 12 kg = $\frac{12}{7} \times 7$ kg donc le prix de 12 kg est égal à $\frac{12}{7} \times 15{,}47$ €.

  Le quotient $\frac{12}{7}$ est un scalaire : 12 kg, c'est $\frac{12}{7}$ fois 7 kg

- 15,47 € = $\frac{15{,}47}{7}$ €/kg × 7 kg = 2,21 €/kg × 7 kg donc le prix de 12 kg est égal à 2,21 €/kg × 12 kg. Le quotient $\frac{15{,}47}{7}$ est ici une grandeur quotient : des € par kg.

3.2.3 La division

Il a été mis en évidence que $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$, avec a et b entiers en classe de 6e et a et b décimaux en classe de 5e, ce qui s'énonce de la façon suivante : $\frac{a}{b}$, quotient de a par b, est égal au produit de a par $\frac{1}{b}$.

En classe de 4e, l'inverse d'un nombre est défini comme étant le quotient de 1 par ce nombre.

Ainsi par définition, $\frac{1}{\frac{a}{b}}$ (avec a et b entiers ou décimaux non nuls) est la solution de $\frac{a}{b} \times x = 1$.

Or $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$, ce qui permet de déduire que $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$.

Cherchons s'il existe un nombre qui soit le quotient de $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, c'est-à-dire qui soit solution de $\frac{c}{d} \times x = \frac{a}{b}$.

Supposons que ce nombre existe. Il en résulte en multipliant les deux membres de l'égalité par d puis par b que : $c \times x = \frac{a}{b} \times d$, puis que : $b \times c \times x = a \times d$

Les nombres b et c étant non nuls, il en est de même de $b \times c$.
x apparaît comme étant le quotient de $a \times d$ par $b \times c$.

Ainsi, si un tel nombre existe, il ne peut qu'être égal à $\frac{a \times d}{b \times c}$.

Il reste à montrer que ce quotient convient :

$$\frac{c}{d} \times \frac{a \times d}{b \times c} = \frac{c \times a \times d}{d \times b \times c} = \frac{a}{b}$$

Le quotient de $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$ est égal à $\frac{a \times d}{b \times c} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{\frac{c}{d}}$.

Il en résulte que diviser par un nombre, c'est multiplier son inverse.

3.3 Les nombres décimaux

3.3.1 Addition, soustraction et multiplication par un entier

L'addition, la soustraction de nombres décimaux ainsi que la multiplication d'un nombre décimal par un entier ont été étudiées à l'école primaire. Du point de vue du sens, ces opérations sur les décimaux ne présentent pas de difficulté car elles s'inscrivent dans la continuité de celui qui leur a été donné sur les entiers naturels. Du point de vue des techniques, celles-ci sont maîtrisées par une majorité d'élèves. Pour les autres élèves, les erreurs, en dehors de celles déjà signalées dont l'origine est la méconnaissance des tables, sont dues pour l'essentiel à :

- un mauvais placement des nombres (alignement des chiffres à partir de la droite pour l'addition et la soustraction posées) ;
- dans le cas d'une addition ou d'une soustraction «en ligne », l'addition ou la soustraction faite séparément des parties entières et des parties décimales;
- dans le cas d'une multiplication, la juxtaposition du produit de la partie entière par le multiplicateur entier et du produit de la partie décimale par ce même entier, les résultats étant séparés par une virgule.

Il appartient à l'enseignant de 6^{e} de permettre aux élèves de comprendre ces techniques pour en acquérir la maîtrise. Cette compréhension passe par la mobilisation de la signification de l'écriture à virgule d'un nombre décimal. Par exemple, pour multiplier 73,4 par 6, il faut comprendre que :

- 73,4 c'est 7 dizaines, 3 unités et 4 dixièmes ;
- 6 fois 4 dixièmes font 24 dixièmes, soit 2 unités et 4 dixièmes (car 10 dixièmes, c'est une unité) ;
- 6 fois 3 unités font 18 unités auxquelles on ajoute les 2 unités de 24 dixièmes, ce qui donne 20 unités, soit 2 dizaines et 0 unité (car 10 unités, c'est une dizaine) ;
- 6 fois 7 dizaines font 42 unités auxquelles on ajoute les 2 dizaines de 20 unités, ce qui donne 44 dizaines.

L'oralisation joue un rôle déterminant dans la justification de la technique et donc pour sa compréhension.

3.3.2 Multiplication d'un décimal par un décimal

La difficulté ne porte pas sur la technique mais sur la construction du sens. La multiplication par un décimal ne peut plus être conçue comme une addition itérée comme c'était le cas pour le produit d'un entier ou d'un décimal par un entier. Différentes approches complémentaires de la multiplication d'un décimal par un décimal sont nécessaires :

- **Dans le contexte de la mesure d'aires**

Il est possible d'effectuer pour les nombres décimaux en écriture fractionnaire et sur un exemple générique, un travail similaire à celui exposé pour les nombres en écriture fractionnaire (paragraphe 3.2.2). Une unité de longueur *u* étant choisie, l'unité d'aire est celle du carré ayant pour côté l'unité de longueur. La mesure de l'aire d'un rectangle de dimensions 3,7 et 2,14, ou encore $\frac{37}{10}$ et $\frac{214}{100}$, s'obtient en découpant le carré en rectangles de dimensions $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{100}$ qui est ainsi partagé en 1000 petits rectangles. La mesure de l'aire d'un petit

rectangle est égal à $\frac{1}{1000}$. Le rectangle dont on cherche à déterminer la mesure de l'aire contient 37×214 de ces petits rectangles. La mesure de son aire est donc égale à $(37 \times 214) \times \frac{1}{1000}$ soit $\frac{37\times214}{1000}$ ou encore $\frac{37\times214}{10\times100}$. La mesure de l'aire du rectangle peut alors s'écrire de deux façons : $\frac{37}{10}\times\frac{214}{100}$ et $\frac{37\times214}{10\times100}$, ce qui se traduit par l'égalité $\frac{37}{10}\times\frac{214}{100} = \frac{37\times214}{10\times100}$ ou encore $3,7 \times 2,14 = 7,918$. Cette démarche permet par la même occasion de justifier la technique de la multiplication de deux décimaux.

Toujours dans le contexte de la mesure d'aires, le travail peut être conduit en recourant aux unités légales de mesure et en se ramenant à la multiplication de deux entiers, mais il contraint à faire un même choix d'unités pour chacune des dimensions. Soit à déterminer l'aire d'un rectangle de dimensions 3,7 m et 2,14 m. L'aire du rectangle est égale à $3,7\text{ m} \times 2,14\text{ m} = 370\text{ cm} \times 214\text{ cm} = 79180\text{ cm}^2 = 7,9180\text{ m}^2$. Cette démarche ne permet pas de construire complètement la technique et suppose que les correspondances entre unités d'aire sont bien connues des élèves.

- **Dans le cadre de la proportionnalité**

Soit par exemple à déterminer le prix d'une quantité de 2,14 kg à 3,7 € le kg. La démarche consiste à voir 2,14 kg comme étant $2\text{ kg} + \frac{1}{10}\text{ kg} + \frac{4}{100}\text{ kg}$ et à déterminer successivement :

- le prix de 2 kg soit $3,7\text{ €} \times 2 = 7,4\text{ €}$;
- le prix de $\frac{1}{10}$ kg, c'est $\frac{1}{10}$ de 3,7 € soit dix fois moins que 3,7 €, soit 0,37 €
- le prix $\frac{4}{100}$ kg, c'est $\frac{4}{100}$ de 3,7 € soit 4 fois $\frac{1}{100}$ de 3,7 €, soit $4 \times 0,037\text{ €} = 0,148\text{ €}$

et additionner les prix de chacune de ces quantités pour arriver à 7, 918 €.

La comparaison au résultat que fournit une calculatrice pour le produit $3,7 \times 2,14$ permet de conclure qu'une démarche plus économique consiste à multiplier le prix au kg (3,7) par la quantité (2,14), ce qui constitue une extension aux quantités décimales du fait que le prix d'une quantité entière (en kg) s'obtenait déjà en multipliant le prix au kg par cette quantité. Cette démarche permet de construire un autre sens de la multiplication de deux décimaux que celui construit dans le contexte de produit de mesures d'aire[8].

Une autre démarche s'appuyant toujours sur la proportionnalité consiste à utiliser que 2,14 kg, c'est $\frac{214}{100}$ kg, soit 100 fois moins que 214 kg. Le prix de 214 kg étant égal à $214 \times 3,7$ €, le prix de 2,14 kg est donc 100 fois moindre soit $\frac{214\times3,7}{100}$ €.

- **Dans un cadre théorique**

[8] Vergnaud G. (1986) « Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques : un exemple, les structures additives », Grand n°38, IREM de Grenoble

Vergnaud G. et all (1997) *« Fichier pédagogique Résolution de problèmes »*, collection « Le moniteur de mathématiques », Nathan

Il est possible d'effectuer sur un exemple générique, un travail similaire à celui exposé pour le produit d'un décimal par un quotient de deux entiers (paragraphe 3.2.2). Pour effectuer le produit de 2,14 par 3,7 utilisons le fait que 3,7 est le quotient de 3,7 par 10 et calculons

$(2{,}14 \times 3{,}7) \times 10 = 2{,}14 \times (\frac{37}{10} \times 10) = 2{,}14 \times 37$

$2{,}14 \times 3{,}7$ apparaît alors comme étant le quotient de $2{,}14 \times 37$ par 10

$2{,}14 \times 3{,}7 = \frac{2{,}14 \times 37}{10}$

A la justification « classique » de la technique de la multiplication de deux décimaux :

		2,	1	4	$\times 100$ →			2	1	4
×			3,	7	$\times 10$ →	×			3	7
1	4	9	8			1	4	9	8	
6	4	2				6	4	2		
7,	9	1	8		← $: 1000$	7	9	1	8	

cette dernière approche permet de substituer une justification qui s'appuie sur la technique du produit d'un décimal par un entier installée à l'école primaire et sur la notion de quotient :
$2{,}14 \times 3{,}7 = (2{,}14 \times 37) : 10 = 79{,}18 : 10 = 7{,}918$.

Il est essentiel de travailler avec les élèves les ruptures qui interviennent lors du passage de la multiplication sur les entiers à la multiplication sur les décimaux du point de vue du sens mais également du point de vue des propriétés, en particulier le fait que pour les décimaux, la multiplication n'agrandit pas forcément.

3.3.3 La division d'un décimal par un décimal

Le quotient décimal d'un entier ou d'un décimal par un entier ne présente pas de difficulté particulière du point de vue du sens car il s'inscrit dans la continuité de la division euclidienne, dans la mesure où il peut être rattaché à une situation de partage d'une quantité, continue et non plus discrète, en un nombre entier de parts équitables. La construction de la technique mobilise la numération décimale et la signification de l'écriture à virgule. Par exemple, lors du partage de 893,4 en 13 parts égales, le partage de 893 donne un quotient entier de 68 et un reste de 9. Les 9 unités restantes avec les 4 dixièmes de 893,4 font 94 dixièmes à partager en 13, ce qui donne un quotient partiel de 7 dixièmes et un reste de 3 (dixièmes). Une fois de plus, l'oralisation joue un rôle déterminant dans la compréhension de la technique. Plus délicat que dans le cas de la division euclidienne est l'interprétation du reste (3 dixièmes = 0,3), l'oral constitue ici une aide certaine.

Il y a une rupture de sens lors du passage à la division d'un entier ou d'un décimal par un décimal. Il n'est plus possible de faire référence à une situation de partage en parts égales. Le sens de cette nouvelle division se construit en lien avec la reconnaissance d'une situation de multiplication où il s'agit de déterminer un facteur manquant. C'est la difficulté à déterminer ce facteur manquant en effectuant des essais multiplicatifs qui justifie qu'on élabore une nouvelle technique.

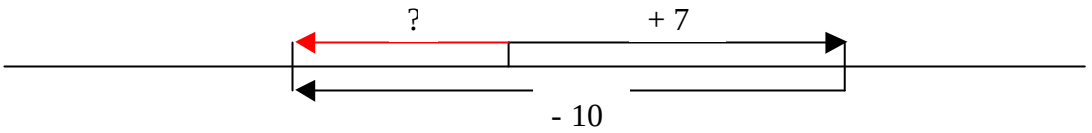
Cette technique s'appuie sur la propriété des quotients construite en sixième, à savoir qu'on ne change pas un quotient quand on multiplie numérateur et dénominateur par un même nombre. Il est indispensable de mettre en évidence que cette propriété vaut pour la multiplication ($\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$), mais pas pour l'addition (en règle générale $\frac{a}{b} \neq \frac{a+c}{b+c}$).

Multiplier dividende et diviseur par un même nombre, une puissance de 10, permet de se ramener soit à une division euclidienne, soit à une division par un entier. La difficulté se situe

au niveau de la détermination du reste r qui nécessite de mobiliser le lien existant entre multiplication et division : $D = d \times q + r$ avec D, d, q et r décimaux. De cette égalité, on tire la valeur de $r = D - d \times q$.
En classe de 6e, les élèves peuvent être conduits en situation à déterminer «à la main » un quotient décimal d'un décimal par un décimal. A ce niveau de classe, c'est la compréhension des étapes de la démarche qui est privilégiée, ce qui légitime d'une part, l'écriture de l'égalité des quotients, comme par exemple $\frac{89,34}{1,3} = \frac{893,4}{13}$ ou $\frac{89,34}{1,3} = \frac{8934}{130}$ et d'autre part, la pose de la division de 893,4 par 13 ou de 8934 par 130. Ce n'est qu'en 5e que la technique de la division posée d'un décimal par un décimal, qui consiste à déplacer d'un même nombre de rangs la virgule au dividende et au diviseur, sera introduite et présentée comme un raccourci de la procédure utilisée jusque là. Toutefois, il est préférable de parler de multiplication par 10, 100, 1000 du dividende et du diviseur plutôt que d'un déplacement de la virgule de un, deux ou trois rangs, qui masque la signification du travail sous-jacent.

3.4 Les nombres relatifs

L'introduction des nombres relatifs, entiers et décimaux, en référence au repérage de points sur une droite graduée (température, échelle chronologique, altitude et profondeur), si elle s'appuie sur une fréquentation qu'en ont déjà les élèves, présente un inconvénient du point de vue de la définition de l'addition sur ces nombres. Pour contourner l'impossibilité de définir par exemple la somme de deux températures, on recourt au procédé suivant : la somme - 7 + 10 = 3 est définie comme correspondant à une augmentation de 10° d'une température de -7° relevée à un instant donné. Les termes de cette somme -7 et 10 ont des statuts différents : -7 correspond à un état alors que 10 traduit une variation. On définit ainsi une loi externe qui à un état (-7) fait correspondre un second état (3).
D'autres approches, qui réfèrent elles aussi à des situations concrètes, permettent d'introduire l'addition des relatifs : situations de gains et de pertes, déplacements sur une droite graduée. La somme de deux nombres relatifs est alors présentée comme la composition de deux transformations[9] : bilan des gains ou pertes, bilan de deux déplacements. La référence aux déplacements sur une droite graduée, en codant positivement un déplacement dans un sens et négativement un déplacement dans l'autre sens, ou à des situations de gains et de pertes fournit un support à la production raisonnée du calcul d'une somme. Ainsi un déplacement de 7 dans le sens positif suivi d'un déplacement de 10 dans le sens négatif correspond à un déplacement de 3 dans le sens négatif.



En référence aux situations concrètes qui sont susceptibles de se présenter, l'introduction des deux aspects de l'addition de deux relatifs est légitime. Toutefois, le recours à ces situations concrètes pour introduire l'addition des nombres relatifs présente des limites car il n'assure pas qu'un élève saura s'émanciper de tels contextes. Par ailleurs, ces supports ne permettent pas de donner du sens à la multiplication de deux relatifs.

C'est pourquoi, le programme de la classe de 5e suggère un autre mode d'introduction des nombres relatifs, interne aux mathématiques. Il s'agit de construire de nouveaux nombres

[9] Voir à ce propos la typologie des structures additives de G. Vergnaud

pour rendre la soustraction toujours possible. Comme cela est développé dans le document « Nombres au collège», un nombre négatif apparaît alors comme étant la différence entre 0 et un nombre positif. Ainsi -7,1 = 0 - 7,1 (-7,1 est appelé l'opposé de 7,1) et, par définition de la différence, 7,1 + (-7,1) = -7,1 + 7,1 = 0 (les deux nombres sont dits opposés).

3.4.1 Addition

La question est posée d'étendre à ces nouveaux nombres l'addition connue sur les nombres positifs. Les règles d'addition sur les relatifs découlent de la volonté d'étendre à ces nouveaux nombres les propriétés bien connues, mais non formalisées, de l'addition (commutativité, associativité, 0 est élément neutre …) sur les nombres positifs.

A titre d'exemple, nous indiquons ici une approche possible des règles d'addition qui au-delà des propriétés de l'addition, sollicite la propriété de deux nombres opposés et la définition de la soustraction.

Calcul de (-7) + 9

(-7) + 9 = (-7) + 7 + 2 = 0 + 2 = 2

Calcul de (-7) + (-4)

(-7) + 7 = 0 et (-4) + 4 = 0

Donc (-7) + 7 + (-4) + 4 = 0

(-7) + (-4) + 7 + 4 = 0

(-7) + (-4) + 11 = 0

(-7) + (-4) = 0 -11

(-7) + (-4) = -11

Calcul de 4 + (-9)

4 + (-9) = 4 + (-4) + (-5) = 0 + (-5) = (-5)

Ces exemples étant génériques, les règles d'addition peuvent être formulées.

3.4.2 Soustraction

Si a et b désignent deux décimaux relatifs, montrons qu'il existe un nombre d qui ajouté à b, donne a.

Supposons qu'un tel nombre d existe. On a alors : $d + b = a$.

On en déduit que :

$$d + b + \text{opp}(b) = a + \text{opp}(b)$$

et donc : $d = a + \text{opp}(b)$.

Ainsi, le seul nombre qui peut convenir est $a + \text{opp}(b)$.

Il est ensuite facile de démontrer qu'il convient effectivement : $a + \text{opp}(b) + b = a + 0 = a$.

Finalement, quels que soient les deux nombres relatifs a et b, il existe un nombre relatif et un seul qui ajouté à a donne b. On le note encore $a - b$.

Ainsi, quels que soient les nombres relatifs a et b, $a - b = a + \text{opp}(b)$.

Soustraire un nombre, c'est ajouter son opposé.

3.4.3 Multiplication

Il est possible d'approcher la multiplication des relatifs en sollicitant le sens premier de la multiplication construit sur les naturels, celui d'une addition itérée : $2 \times (-3) = (-3) + (-3) = (-6)$. La multiplication sur les relatifs étant supposée conserver les propriétés connues pour les naturels : $2 \times (-3) = (-3) \times 2 = (-6)$. Il reste à définir le produit de deux négatifs. La construction d'un tableau comme celui-ci peut aider à conjecturer que $(-2) \times (-3) = 6$, chaque symétrie par rapport aux bandes grisées correspondant à un changement de signe.

- 9	- 6	- 3	3	3	6	9
- 6	- 4	- 2	2	2	4	**6**
- 3	- 2	- 1	1	1	2	3
- 3	- 2	- 1	×	1	2	3
			- 1	- 1	- 2	- 3
			- 2	- 2	- 4	**- 6**
			- 3	- 3	- 6	- 9

La validation se fait en recourant à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :
$(-2) \times (-3) + 2 \times (-3) = [(-2) + 2] \times (-3) = 0 \times (-3) = 0$
$(-2) \times (-3) + (-6) = 0$ d'où on déduit que $(-2) \times (-3) = \text{opp}(-6) = 6$
La multiplication sur les décimaux relatifs ne peut résulter que d'une construction mathématique dans laquelle on cherche à étendre cette opération aux nombres relatifs en faisant en sorte que les propriétés de la multiplication sur les décimaux positifs continuent à s'appliquer.
Toujours en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, on commence par déterminer le produit de deux décimaux de signes différents comme étant l'opposé du produit de deux positifs, puis le produit de deux nombres négatifs comme étant l'opposé du produit de deux décimaux de signes différents. Le travail conduit sur des exemples génériques permet d'institutionnaliser les procédures de multiplication.
Après cette phase de construction, le calcul mental joue un rôle très important dans l'appropriation des règles de calcul construites pour l'addition et la multiplication en les faisant notamment fonctionner sur des entiers ou des décimaux très simples.

La règle « algébrique » des signes dans le calcul littéral
La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition permet de montrer que quels que soient les nombres relatifs a et b : $a \times \text{opp}(b) = \text{opp}(ab)$ et $\text{opp}(a) \times \text{opp}(b) = ab$
Ce travail peut être conduit sur des exemples numériques.
En utilisant la notation usuelle de l'opposé, ces propriétés s'écrivent :
$a \times (-b) = -(ab)$ que l'on note $-ab$, faisant que la multiplication est prioritaire sur le passage à l'opposé, règle de priorité rarement explicitée.
et $(-a) \times (-b) = ab$
L'emploi des deux écritures pour les propriétés précédentes, l'une utilisant la notation $\text{opp}(a)$ et l'autre la notation $-a$, aide les élèves à comprendre que $-a$ n'est pas autre chose que $\text{opp}(a)$ et donc à comprendre que $-a$ n'est pas toujours négatif.

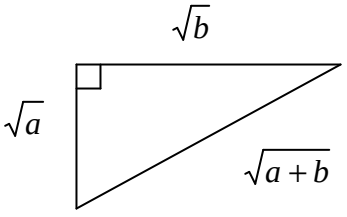
Les puissances
Plutôt que mémoriser les formules donnant le produit de deux puissances d'un même nombre ou encore la puissance d'une puissance, les élèves doivent être à même de les reconstruire instantanément en recourant à la définition de la puissance d'un nombre et aux propriétés « en actes » de la multiplication. Par exemple, l'élève doit être capable de retrouver instantanément que $a^n \times a^p = a^{n+p}$, où n et p sont des naturels, en mettant en œuvre le raisonnement suivant : effectuer le produit de n facteurs tous égaux à a par le produit de p facteurs tous égaux à a revient à effectuer le produit de $n + p$ facteurs tous égaux à a, soit sur des lettres ayant le statue d'indéterminée, soit en utilisant un exemple générique.

La puissance d'exposant n d'un nombre a est définie pour tout entier $n \geq 2$ comme étant le produit de n nombres tous égaux à a. La signification de a^0, a^1 et a^{-n} (n entier positif) est ensuite définie de façon à ce que la propriété $a^n \times a^p = a^{n+p}$ mise en place pour des exposants $n \geq 2$ soit étendue à tout exposant entier relatif. Ainsi :

- $a^n \times a^0 = a^{n+0} = a^n$, on en déduit que $a^0 = 1$;
- $a^n \times a^1 = a^{n+1}$, on en déduit que $a^1 = a$;
- $a^n \times a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$, on en déduit que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

3.5 Les racines carrées

Après avoir recouru à la mesure pour justifier l'existence de nombres qui ne s'expriment pas tous sous forme fractionnaire, comme par exemple $\sqrt{2}$ (se reporter au document « Nombres au collège »), ces écritures n'acquièrent vraiment le statut de nombres que par la possibilité de développer des techniques de calcul sur ces écritures.
Comment calculer des sommes, produits… de tels nombres ?
a et b étant des nombres positifs, il est relativement facile d'installer que $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ et $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ en recourant à la définition de la racine carrée d'un nombre et au fait que deux nombres positifs qui ont le même carré sont égaux. Le support de la géométrie et les aires peuvent contribuer à imager ces propriétés. Par exemple, lorsque le côté d'un carré est multiplié par $\sqrt{a}$ son aire est multipliée par a, si on multiplie le côté du nouveau carré par $\sqrt{b}$, son aire est multipliée par b et l'aire du carré initial a donc été multipliée par $a \times b$. Si l'aire a été multipliée par $a \times b$, c'est donc que le côté a été multiplié par $\sqrt{a \times b}$. On retrouve ainsi le fait que $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$.
Les élèves induisent facilement à tort que les propriétés mises en place pour le produit et le quotient de radicaux (le produit/quotient de deux radicaux est égal au radical du produit/quotient des nombres écrits sous les radicaux) s'étendent à la somme de radicaux ; aussi est-il utile de prouver que $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$. Il suffit pour cela d'exhiber un contre exemple bien choisi. Cette inégalité peut également être mise en évidence dans le cadre géométrique. Un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ a pour hypoténuse $\sqrt{a+b}$.
L'inégalité triangulaire dans le triangle rectangle permet de conclure que si a et b sont deux nombres positifs non nuls, $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$.



$\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Pour montrer que $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ si a et b sont strictement positifs, le professeur peut faire remarquer que $a + b + 2\sqrt{a}\sqrt{b}$ est le carré de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$[10].

[10] De $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{a}\sqrt{b}$, on peut déduire que $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{a}\sqrt{b}}$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est manifestement plus grand que $\sqrt{a+b}$, car son carré $a + b + 2\sqrt{a}\sqrt{b}$ est plus grand que $a + b$.

Le calcul mental va encore une fois permettre à l'élève de faire fonctionner et de s'approprier les règles de calcul sur les racines carrées. Il est fort utile, pour simplifier un quotient de deux racines carrées, de savoir repérer que les deux nombres écrits sous les radicaux sont multiples d'un même nombre ou encore, pour écrire différemment la racine carrée d'un nombre, d'identifier ce nombre comme étant le produit d'un carré par un autre nombre. On voit ici l'importance qu'il y a à savoir dans quelles tables de multiplication se trouve un nombre, en tant que résultat, et de connaître un certain nombre de carrés.

Éléments d'aide pour une programmation en calcul mental en collège

1. Les compétences travaillées au cycle 3 de l'école élémentaire qui sont à consolider au collège

Les compétences et les commentaires en italique qui les accompagnent, sont extraits du document d'accompagnement des programmes de l'École primaire : « Le calcul mental à l'école élémentaire »)

Addition / Soustraction

Calcul automatisé	- maîtriser le répertoire additif (tables d'addition), compléments, différences et décompositions associées - calculer les compléments à la centaine supérieure pour des nombres entiers dont le chiffre des unités est 0 *comme par exemple les compléments de 430 à 500, de 2 430 à 2 500* - connaître les relations additives entre multiples de 25 inférieurs à 100 ou de multiples de 250 inférieurs à 1000. *Il s'agit par exemple de savoir que 75 = 50 + 25 ou que 1 000 – 750 = 250…* - calculer certaines sommes de deux nombres décimaux *(avec un chiffre après la virgule comme par exemple 2,5 + 0,5 ou 3,7 + 0,6)* - décomposer un nombre décimal en utilisant l'entier immédiatement inférieur comme par exemple : 37,05 = 37 + 0,05 ou 37,05 = 37 + **Erreur !** - calculer les compléments à l'unité supérieure de nombres ayant un chiffre après la virgule - connaître quelques relations entre certains nombres entiers et décimaux *Des résultats comme 2,5 + 2,5 = 5 ; 1,5 + 1,5 = 3 ; 7,5 + 7,5 = 15 doivent être produits très rapidement.*
Calcul réfléchi	- ajouter ou soustraire des nombres entiers proches de nombres "ronds" tels que 9, 19, 11, 21, 8, 18, 12, 22, 99, 101, 198... - calculer des sommes et différences de nombres entiers de 2 chiffres (ou dont le calcul peut s'y ramener) *comme 48 + 53, 50 – 13, 31 – 18, 450 – 180, 453 + 28, 3 600 + 1 400, 46 000 000 – 18 000 000…* - calculer des sommes de plusieurs nombres entiers en regroupant des termes "qui vont bien ensemble". *Exemple : le calcul de 43 + 280 + 60 + 57 + 20 peut être facilité par le "rapprochement" de 43 et 27 et de 280 et 20.* - calculer des sommes ou des différences de nombres décimaux dans des cas simples comme 5,7 + 2,4. *Des nombres à un chiffre après la virgule ou du type 7,25 ; 8,15 ; 0,75 peuvent être utilisés avec intérêt.* *Pour un calcul comme 7,2 – 2,5, différentes stratégies sont possibles en fin de cycle 3 :* *- transformer 7,2 en 6 unités et 12 dixièmes pour rendre le calcul possible ;* *- chercher l'écart entre 2,5 et 7,2 en allant d'abord de 2,5 à 3 ou à 5, puis à 7, puis à 7,2 ;* *- calculer 72 – 25, puis diviser le résultat par 10…* - calculer le complément au nombre entier immédiatement supérieur d'un nombre décimal ayant deux chiffres après la virgule - évaluer un ordre de grandeur, en utilisant un calcul approché : sommes de deux ou plusieurs nombres entiers ou décimaux, différences de deux nombres entiers ou décimaux. *Le placement approché de nombres sur la droite numérique repérée par des « nombres ronds » constitue une aide pour apprécier l'ordre de grandeur des nombres et choisir les arrondis appropriés dans un calcul.*

Multiplication / Division

Calcul automatisé	- maîtriser le répertoire multiplicatif (tables de multiplication) : produits de deux nombres entiers inférieurs à 10, recherche d'un facteur, quotients et décompositions associés. *Il faut souligner que la récitation mécanique des tables constitue un obstacle à la mobilisation rapide d'un résultat quelconque. Connaître 8 ´ 6 = 48, c'est tout autant pouvoir donner rapidement ce résultat que répondre à « Combien de fois 8 dans 48 ? », à « Diviser 48 par 6 », décomposer 48 sous forme de produits de deux nombres inférieurs à dix, savoir que 48 est dans la table de 6 (et celle de 8).* - utiliser la connaissance des tables pour répondre à des questions du type « Combien de fois 8 dans 50 ? » ou « Diviser 50 par 8 » - situer un nombre entier entre deux résultats d'une table de multiplication. *Par exemple, encadrer 29 entre deux multiples de 7.* - calculer des produits du type 30×4 ; 400×8 ; 20×30 et les quotients correspondants - connaître et utiliser les relations entre des nombres « repères » : 100, 1000 et 60 et leurs diviseurs. *Ces relations sont liées à l'utilisation des expressions « moitié », « double », « quart », « quadruple », « tiers », « triple ». L'objectif est que les élèves aient mémorisé le fait que 25 est le quart de 100, la moitié de 50, le tiers de 75… Le calcul sur les durées est également aidé par la connaissance des relations entre 60 et les nombres 5, 10, 15, 20, 30.* - multiplier et diviser par 10, 100… dans l'ensemble des nombres décimaux. *Il est important de profiter de ce travail pour faire prendre conscience aux élèves que multiplier 3,5 par 100 revient à transformer les unités en centaines, les dixièmes en dizaines, les centièmes en unités : la réponse 350 n'est pas seulement le résultat de l'application d'une règle, mais doit être liée à une compréhension qui enrichit la connaissance des écritures à virgule.* - connaître les relations entre certains nombres décimaux, comme 0,25 ; 0,5 ; 0,75 et 1 ou 2,5 ; 5 ; 7,5 et 10.
Calcul réfléchi	- calculer les doubles et moitiés, quadruples (doubles des doubles) et quarts (moitiés des moitiés), des nombres entiers inférieurs à 100 ou de nombres plus grands, lorsque le calcul reste simple. *A la fin du cycle 3, cette compétence est étendue au calcul des moitiés de nombres impairs (la moitié de 19 est 9,5, celle de 73 est 36,5…) et à celui des doubles de nombres comme 7,5 ; 45,5…* - multiplier et diviser un nombre entier par 5, par 20, par 50 - multiplier un nombre entier par des nombres comme 11, 12, 9, 19, 21, 15, 25… *Il est important d'insister sur la variété des procédures qui peuvent être utilisées et qui, généralement, s'appuient sur une décomposition des nombres.* - décomposer un nombre entier sous forme de produits de deux ou plusieurs facteurs - calculer mentalement le quotient et le reste entiers dans des cas simples de division d'un nombre entier par un nombre entier. *Les élèves doivent, par exemple, être capables d'effectuer mentalement la division de 230 par 7, en décomposant 230 en 210 + 20 ou en 140 + 70 + 14 + 6.* - évaluer l'ordre de grandeur d'un produit ou d'un quotient (de nombres entiers) par un calcul approché. *Si on souhaite une valeur approchée du résultat de 123 ´ 12, on peut se limiter au calcul de 100 ´ 10 qui fournit un ordre de grandeur acceptable (et obtenu rapidement) ou calculer 120 ´ 12 si on cherche une meilleure approximation. Le calcul de 100 ´ 15 aurait pu concilier les deux impératifs.* - utiliser la connaissance des tables pour calculer des produits simples d'un nombre décimal par un nombre entier. *Au cycle 3, le travail se limite à des questions du type : 0,8 ´ 7 ; 0,6 ´ 5… ou du type 1,2 ´ 3 et 1,2 ´ 6 en mettant en évidence les connaissances sur les écritures à virgule nécessaires pour traiter ce type de calculs : 1,2 ´ 6, c'est 6 unités et 12 dixièmes ; or 10 dixièmes, c'est 1 unité ; le résultat est donc 7 unités et 2 dixièmes (7,2).*

2. Les compétences à construire au collège

Classe de 6e

Calcul automatisé	- connaître les équivalences d'écriture : 0,1 = $\frac{1}{10}$; 0,01 = $\frac{1}{100}$; 0,001 = $\frac{1}{1000}$; 0,5 = $\frac{1}{2}$; 0,25 = $\frac{1}{4}$; 0,75 = $\frac{3}{4}$; 1,5 = 1 + $\frac{1}{2}$ - connaître les relations entre $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{100}$, entre $\frac{1}{100}$ et $\frac{1}{1000}$, entre $\frac{1}{4}$ (0,25) et $\frac{1}{2}$ (0,5) - donner ou reconnaître une écriture fractionnaire d'un entier simple - écrire une fraction simple sous la forme de la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1, comme par exemple $\frac{7}{3}$ = 2 + $\frac{1}{3}$ - comparer un nombre en écriture fractionnaire à 1 - comparer deux nombres en écriture fractionnaire de même dénominateur ou de même numérateur - multiplier, diviser un nombre entier ou décimal par 10 ; 100 ; 1000… - multiplier un nombre entier ou décimal par 0,1 ; 0,01 ; 0,001 - donner la valeur approchée décimale (par excès ou par défaut) d'un décimal à l'unité, au dixième, au centième près. - reconnaître si un nombre entier est divisible par 2, 3, 4, 5 et 9 en utilisant les critères de divisibilité - multiplier et diviser un nombre entier par 5 - connaître les écritures, décimale et fractionnaire, des pourcentages suivants : 5%, 10%, 50%, 25%, 75% - connaître les équivalences de proche en proche entre deux unités pour les mesures de longueur, de masse, de contenance et d'aire et de volume - connaître quelques équivalences telles que : 1m = 100cm, 1km = 1000m, 1m = 1000mm, 1kg = 1000g… - connaître les équivalences : $\frac{1}{2}$ h = 0,5h = 30 min, $\frac{1}{4}$ h = 0,25h = 15 min, $\frac{3}{4}$ h = 0,75h = 45 min, $\frac{1}{2}$ L = 50cL, $\frac{1}{4}$ L = 25cL, $\frac{1}{10}$ L = 10cL
Calcul réfléchi	- reconnaître dans des cas simples que deux écritures fractionnaires sont celles d'un même nombre, comme par exemple $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{12}$, $\frac{2}{7}$ et $\frac{6}{21}$ - multiplier un nombre entier ou décimal simple par un nombre en écriture fractionnaire comme $\frac{3}{4}$ × 100 ; $\frac{5}{3}$ × 90 ; 3,5 × $\frac{2}{5}$ - prendre une fraction simple d'une quantité, comme par exemple $\frac{2}{5}$ de 125g, $\frac{5}{3}$ de 15L

	- entretenir et développer les compétences travaillées à l'école primaire et relatives au calcul, exact ou approché, d'une somme, d'une différence de nombres entiers ou décimaux, du produit d'un décimal par un entier, d'un quotient de deux entiers - multiplier un nombre par 11, 12, 15 - repérer une relation arithmétique simple (additive ou multiplicative) entre des nombres, comme par exemple 6,3 = 2,4 + 3,9 ou 42 est le triple de 14, pour résoudre un problème de proportionnalité - appliquer un taux de pourcentage sur des nombres simples comme par exemple 12% de 350 ou 25% de 120. *Plusieurs démarches sont possibles :* *- en décomposant 350 en 300 + 50 et en utilisant le fait que 300 est le triple de 100 et 50 la moitié de 100* *- en multipliant 350 par 12, en recourant à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et en divisant le résultat par 100* *- en multipliant 3,5 par 12 et en utilisant pour cela le fait que 3,5 x 2 = 7 et que 12 = 2 x 6 : 3,5 x 12 = 3,5 x 2 x 6 = 7 x 6.* *Pour 25% de 120, il est intéressant de savoir que 25% c'est un quart.* - utiliser les équivalences entre unités de longueur, de masse, de contenance, d'aire pour effectuer des changements d'unités de mesure - passer dans des cas simples d'une écriture décimale d'une durée exprimée en h à une écriture fractionnaire également exprimée en h ou à une écriture en min, et inversement. Par exemple : 1,25h = 1h + $\frac{1}{4}$ h = 75 min ; $\frac{1}{10}$ h = 6 min ; $\frac{1}{12}$ h = 5 min ; $\frac{5}{6}$ h = 50 min ; $\frac{1}{3}$ h = 20min

Classe de 5e

Calcul automatisé	- additionner ou soustraire deux nombres simples en écriture fractionnaire de même dénominateur. *L'oral joue un rôle déterminant dans l'automatisation de la procédure : « 3 septièmes + 5 septièmes = 8 septièmes »* - savoir que $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, 1 - $\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ - produire ou reconnaître dans des cas simples une écriture fractionnaire d'un même nombre, lui-même en écriture fractionnaire - effectuer le produit de deux nombres simples en écriture fractionnaire, comme par exemple $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$ - comparer deux nombres relatifs - effectuer la somme de deux entiers relatifs - connaître les équivalences de proche en proche entre deux unités de mesure de volume et l'équivalence 1L = 1dm^3
Calcul réfléchi	- effectuer un calcul du type : $3 + 4 \times 2{,}5$; $3 \times 4 \times 2{,}5$; $3 + \frac{2{,}5}{5}$; $\frac{3}{4+5}$ - multiplier un nombre positif par 0,25 ; par 0,5 en s'appuyant sur les égalités 0,25 = $\frac{1}{4}$; 0,5 = $\frac{1}{2}$ - développer une expression simple où les coefficients sont entiers comme $5(x + 1)$, $5(3x + 4)$

	- factoriser une expression simple où les coefficients sont entiers comme $2x + 2y$, $6x + 12$ - effectuer la somme de deux nombres simples en écriture fractionnaire dont le dénominateur de l'un est multiple de l'autre comme $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, $\frac{2}{7} + \frac{3}{14}$ - réduire au même dénominateur deux nombres simples en écriture fractionnaire - utiliser les expressions fractionnaires correspondantes pour calculer 10%, 25%, 50% d'une quantité - calculer un pourcentage dans des cas où les nombres sont des entiers ou des décimaux simples et le rapport entre les nombres est simple. - effectuer la somme de deux décimaux relatifs simples (avec un chiffre à la partie décimale) - effectuer la différence de deux nombres relatifs simples - calculer des sommes algébriques simples où interviennent des entiers relatifs - calculer des sommes algébriques simples où interviennent des entiers relatifs ou des décimaux relatifs simples, en rapprochant des termes « qui vont bien ensemble » comme par exemple $8,7 – 5,9 + 2,3 + 1,9 = 8,7 + 2,3 - 5,9 + 1,9 = 11 - 4$ - utiliser les correspondances entre unités de longueur pour traduire l'information donnée par une échelle sous forme facilement exploitable comme par exemple pour une échelle $\frac{1}{200\ 000}$, 1cm représente 2 km et inversement. - utiliser les équivalences entre unités de volume pour effectuer des changements d'unités de mesure - utiliser l'équivalence 1L =1 dm^3 et la connaissance des correspondances entre unités de volume d'une part, et de contenance d'autre part, pour effectuer des changements d'unités de mesure, par exemple exprimer en cm^3 une mesure donnée en cL.

Classe de 4e

Calcul automatisé	- connaître les carrés des nombres entiers jusqu'à 12 - traduire 1000 en 10^3 ; $\frac{1}{100}$ en 10^{-2} … et inversement - utiliser dans des calculs simples les propriétés relatives aux puissances de 10 - réduire une expression littérale à une variable comme par exemple $3,5x - 4x + 2x$ - calculer des sommes algébriques simples où interviennent des entiers relatifs - calculer le produit de nombres entiers relatifs simples - effectuer le produit de deux nombres simples en écriture fractionnaire où numérateurs et dénominateurs sont des entiers relatifs - déterminer l'inverse d'un nombre entier ou en écriture fractionnaire

Calcul réfléchi	- retrouver le carré de nombres comme 13, 15, 25, 31… - retrouver les cubes des nombres entiers jusqu'à 5 -effectuer des calculs du type : -3×2 ; -3^2 ; $(-3)^2$; $\left(\frac{2}{3}\right)^2$; $\frac{2^2}{3}$; 2×3^2 ; $(2 \times 3)^2$; $2 + 3^2$; $(2 + 3)^2$; 3^{-2} - passer d'une écriture décimale d'un nombre à son écriture scientifique et inversement - déterminer une valeur approchée entière d'un quotient de deux nombres décimaux (positifs ou négatifs) - calculer la valeur prise par une expression littérale à une variable pour des valeurs très simples de cette variable, comme par exemple $2x - 3$; $5 - 2x$ ou $2(x + 1)$ pour $x = 0$; $x = 1{,}5$; $x = 3$. *Les données doivent être écrites.* - réduire une expression littérale à une variable comme par exemple $3{,}5x - 3 + 2{,}5x$; $2x^2 - 3x + x^2$; $2x^2 \times 3x$ - effectuer un calcul simple du type $12 - (7 - 8)$, $2 - 3^2 + 5$; $3 + 7 \times (-2)$; $2 \times (-3) + 3 \times 5$; - comparer deux nombres en écriture fractionnaire comme $\frac{3}{7}$ et $\frac{10}{21}$, $\frac{5}{6}$ et $\frac{4}{9}$, $\frac{9}{12}$ et $\frac{6}{8}$ - effectuer la somme de deux nombres en écriture fractionnaire de dénominateurs différents dans des cas simples comme $\frac{3}{7} + \frac{10}{21}$, $\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$, $\frac{9}{12} + \frac{6}{8}$ - effectuer des calculs du type $\frac{-2}{3} + \frac{1}{6} \times 2$; - déterminer l'inverse de 0,1 ; 0,001 ; 0,5 ; 0,25, 0,2… - diviser un nombre entier ou décimal par 0,5 ; par 0,25 - donner une écriture fractionnaire d'un quotient de deux nombres en écriture fractionnaire simples comme par exemple $\frac{\frac{2}{3}}{3}$; $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}$; $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{5}}$ - déterminer une quatrième proportionnelle dans des cas simples. *Différentes stratégies sont possibles :* *- identifier et utiliser le coefficient multiplicateur existant entre les numérateurs ou les dénominateurs* *- identifier et utiliser le coefficient multiplicateur entre le numérateur et le dénominateur d'un des quotients* *- utiliser le produit en croix* - utiliser les équivalences entre unités de longueur et entre unités de durée d'une part, entre unités de volume et entre unités de masse d'autre part, pour effectuer dans des cas simples des changements d'unités de mesure de vitesse, de densité.

Classe de 3e

Calcul automatisé	- déterminer le coefficient d'une fonction linéaire connaissant un nombre et son image dans des cas simples comme par exemple (14 ; -42) ; (3 ;7), (2,5 ; 12,5) - déterminer le pourcentage de l'ancien prix que représente le nouveau prix après une augmentation ou une diminution de a% - savoir que : augmenter de 100%, c'est multiplier par 2 augmenter de 50%, c'est augmenter de moitié, c'est multiplier par 1,5 diminuer de 50%, c'est diminuer de moitié, c'est diviser par 2 diminuer de 25%, c'est diminuer d'un quart, c'est multiplier par $\frac{3}{4}$ - décomposer un nombre inférieur à 100 en un produit de plusieurs facteurs, les plus petits possibles - réduire des expressions de la forme $3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$ - utiliser les tables de multiplication pour transformer l'écriture d'un produit, d'un quotient de deux racines carrées comme $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ ou $\frac{\sqrt{56}}{\sqrt{8}}$
Calcul réfléchi	- déterminer dans des cas simples l'image ou l'antécédent d'un nombre par une fonction linéaire ou affine - décomposer, quand cela est possible et dans des cas simples, un nombre entier sous la forme d'un produit d'un entier par un carré d'un entier, comme par exemple $162 = 2 \times 9^2$; $80 = 4^2 \times 5$; $250 = 5^2 \times 10$ - déterminer si deux entiers inférieurs à 100 sont premiers entre eux - rendre irréductible une fraction dont numérateur et dénominateur sont inférieurs à 100 - écrire dans des cas simples et quand cela est possible, une racine carrée sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a *et* b entiers - réduire des expressions comme $3\sqrt{2} + 5 - 4\sqrt{2} - 3 + \sqrt{12}$ - effectuer un calcul simple faisant intervenir les propriétés relatives aux puissances d'un nombre, les exposants étant positifs comme $2^7 \times 2^5$; $3^4 \times (-3)^5$; $\frac{7^3}{7^8}$; $(3^2)^4$ - développer dans des cas simples des expressions de la forme $(ax + b)^2$; $(a x - b)^2$; $(ax + b)(ax - b)$ $(x + a)(x + b)$; $(x + a)(x - b)$; $(x - a)(x - b)$ où a et b sont des entiers inférieurs à 5 - factoriser des expressions de la forme $x^2 + 2ax + a^2$; $x^2 - 2ax + a^2$; $a^2 x^2 - b^2$ où a et b sont des entiers inférieurs à 10.